Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,
U. de Guanajuato.
Tarea 7 de Álgebra Lineal II: Subespacios invariantes.
15 de octubre de 2012.
Fecha de entrega: lunes 22 de octubre de 2012.

1. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con $\dim(E) = n$. ¿Cuáles endomorfismos f cumplen que $f^3 = a^2 f$, con $a \in \mathbb{R}$?

2. Sea E un K-espacio vectorial con $\dim(E) = n$ y sea $f \in \mathrm{End}(E)$. Sea $G \subset E$ un subespacio f-cíclico, $g = f|_G$ (la restricción de f a G) y supongamos que el polinomio mínimo $m_g(x)$ de g es $(x-a)^s$, donde $a \in K$ y $s \geq 0$.

   a) Demuestra que existe $u \in G$ tal que
   $$\mathbf{B} = \{u, (f - aI)u, \ldots, (f - aI)^{s-1}u\}$$
   son linealmente independientes y forman una base de G.

   b) Demuestra que la matriz de g en la base $\mathbf{B}$ es
   $$J(a,s) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

3. Sean V un espacio vectorial no necesariamente de dimensión finita, $f \in End(V)$, $v \in V, v \neq 0$ y sea W el subespacio f-cíclico generado por v. Para cualquier $w \in V$, demuestre que $w \in W$ si y sólo si existe un polinomio $p(x)$ tal que $w = p(T)(v)$.

4. Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $f \in End(V)$ y W un subespacio f-cíclico de V. Suponga que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son vectores propios de f que corresponden a valores propios distintos de f. Demuestre que si $v_1 + v_2 + \cdots + v_k \in W$, entonces $v_i \in W$, para toda $i = 1, ..., k$,